کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

محاسبه تغییرشکل سازه ها به روش کار مجازی.

روش کار مجازی قوی ترین و کارآمدترین روش برای محاسبه تغییرشکل در سازه های معین است. در این روش می توان:

۱) تغییرشکل های حاصل از خمش، برش، پیچش و نیروی محوری را باهم در نظر گرفت.

۲) در این روش می توان اثرات ناشی از نشست، نقص عضو و یا تغییرات دما را نیز در نظر گرفت.

اصل کار مجازی.

سازه ای را در نظر بگیرید که تحت تأثیر بارهای خارجی تغییرشکل داده و به حالت تعادل رسیده است. اگر برای این سازه یک تغییرشکل مجازی فرض شود، آنگاه کار نیروهای داخلی در اثر تغییرشکل مجازی برابر است با کار نیروهای خارجی در اثر تغییرشکل مجازی.

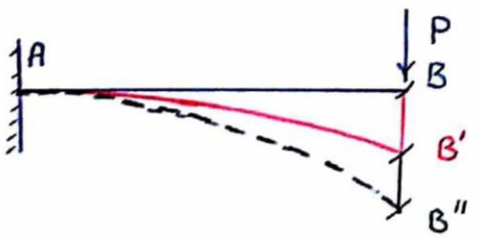
$$W_{int} = W_{ext} \quad (1)$$

W_{int} : کار نیروهای داخلی

W_{ext} : کار نیروهای خارجی

تغییرشکل مجازی یا تغییرمکان مجازی.

تغییرشکل مجازی یک تغییرشکل فرضی است که برای سازه در نظر گرفته می شود و اغلب بهتر است متناسب با شرایط تکیه گاه در نظر گرفته شود (در غیر این صورت کار مجازی واکنش های تکیه گاهی نیز باید در نظر گرفته شود). تغییرشکل مجازی نباید با تغییرشکل حقیقی سازه تحت اثر بارهای خارجی اشتباه گرفته شود.



تغییرشکل حقیقی سازه : $BB' : \delta_B$

تغییرشکل مجازی سازه : $B'B'' : d\delta_B$

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

محاسبه کار نیروهای خارجی (W_{ext})

- اگر نیروی خارجی یک نیروی متمرکز باشد آنگاه کار نیروهای خارجی برابر است با حاصلضرب نیرو در جابجایی نیرو
- اگر نیروی خارجی یک گشتاور متمرکز باشد آنگاه کار نیروهای خارجی برابر است با حاصلضرب گشتاور در دوران

$$W_{ext} = P \times \delta \quad \text{یا} \quad W_{ext} = M \times \theta \qquad (2)$$

به عنوان دوبتر شکل قبل $W_{ext} = P d\delta_B$ (در اثر تغییر شکل مجازی)

محاسبه کار نیروهای داخلی (W_{int})

کار نیروهای داخلی در اثر نیروهای داخلی (مثلا P، M، V یا P) ایجاد می‌شود. مثلا" اگر فقط تغییر شکل خمشی مدنظر باشد، کار نیروهای داخلی برابر است با

$$dW_{int} = M\, d\theta$$

$$W_{int} = \int M d\theta \qquad (3)$$

اکنون چنانچه اصل کار مجازی را بازنویسی کنیم خواهیم داشت:

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$(P \times \delta) \text{ یا } (M \times \theta) = \int M d\theta \qquad (4)$$

دقت کنید که در رابطه بالا تغییر شکل های خمشی درنظر گرفته شده است.

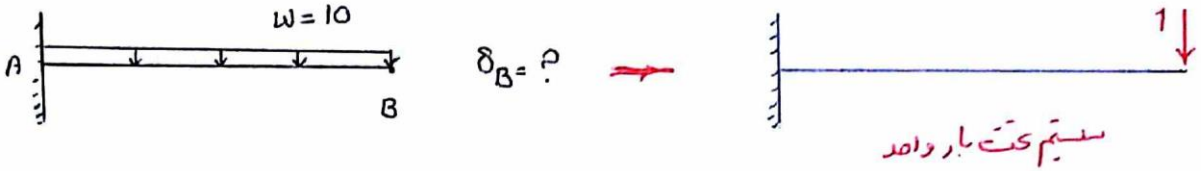
دقت کنید که اصل کار مجازی را برای سازه های معین و یا نامعین می توان به کار برد اما در عمل کاربرد آن محدود به محاسبه تغییرشکل در سازه های معین است. چرا که برای انتگرال گیری باید تابع نیروهای داخلی (مثلا" M در رابطه بالا) مشخص باشد.

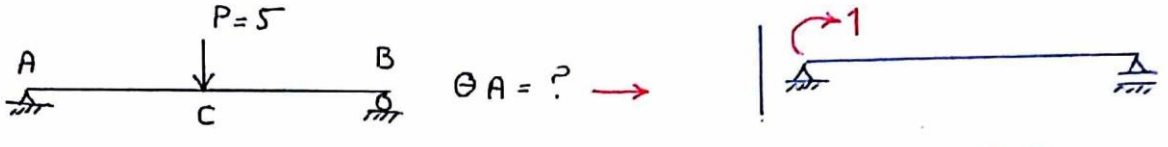
معرفی سیستم تحت بار واحد.

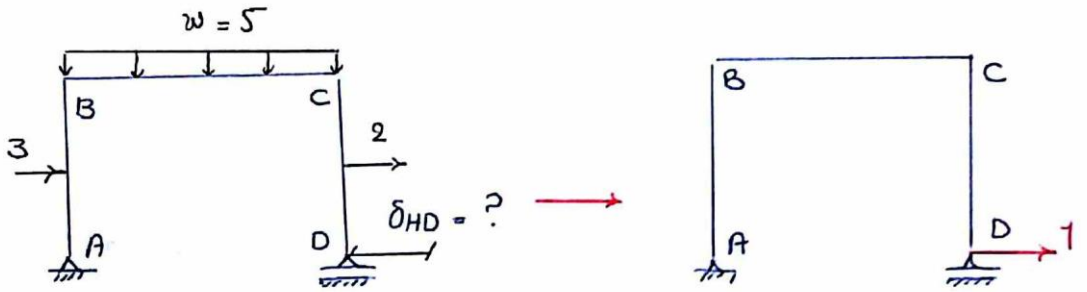
برای معرفی سیستم سازه ای تحت بار واحد، ابتدا بارهای خارجی را حذف می کنیم و سپس یک بار واحد در محل محاسبه تغییرشکل به سازه اعمال می کنیم.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

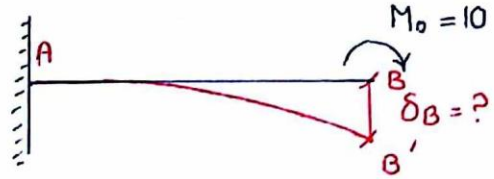
مثال برای هریک از سازه‌های زیر سیستم تحت بارواحد را پیدا کنید.



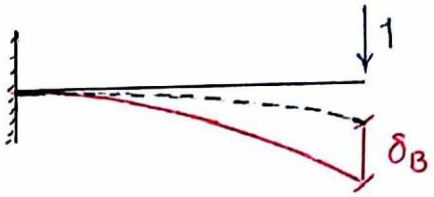




به کار بردن اصل کار مجازی برای سیستم تحت بار واحد.



شکل الف) سیستم تحت بار خارجی



شکل ب) سیستم تحت بار واحد

مطابق شکل الف) یک تیر تحت بار خارجی درنظر می‌گیریم. در اینجا بار خارجی $M_0 = 10$ است.

تابع لنگر خمشی تحت بار خارجی M_L نامیده می‌شود که L از کلمه (External Load) برای بار خارجی است.

برای محاسبه $\delta_B = ?$ سیستم تحت بار واحد را شکل ی دهیم که در شکل ب) نمایش داده شده است تابع لنگر خمشی در این حالت M_u است. (Unit Load).

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

اکنون تغییر شکل مجازی سازه در شکل ب) را مطابق تغییرشکل حقیقی تیر در شکل الف) فرض می‌کنیم طبق اصل کار مجازی داریم:

$$W_{ext} = W_{int}$$

$$1 \times \delta_B = \int M \times d\theta \qquad (5)$$

دقت کنیم که نیروهای داخلی در اثر بار واحد ایجاد شده‌اند پس $M = M_u$

و تغییر شکل مجازی تحت بار خارجی فرض شده است پس $d\theta = d\theta_L$

$$\Rightarrow \quad \delta_B = \int M_u \, d\theta_L \qquad (6)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \qquad (7)$$

اکنون از درس مقاومت مصالح یادآوری می‌کنیم که

$$\Rightarrow \quad \frac{d\theta_L}{dx} = \frac{M_L}{EI} \quad \Rightarrow d\theta_L = \frac{M_L}{EI} dx \qquad (8)$$

اکنون با جایگذاری رابطه (8) در رابطه (6) داریم:

$$\delta_B = \int \frac{M_u M_L}{EI} dx \qquad (9)$$

رابطه فوق برای محاسبه δ_B یعنی جابجایی نقطه B به کار رفته اما می‌تواند برای هر تغییر مکان در نقطه دلخواه (اعم از جابجایی یا دوران) مورد استفاده قرار گیرد.

$$\Delta(\delta \text{ یا } \theta) = \int \frac{M_u M_L dx}{EI}$$

دقت کنیم که رابطه فوق فقط تغییر شکل خمشی تیرها را محاسبه می‌کند.

مراحل محاسبه تغییر شکل سازه به روش کار مجازی

۱) تحلیل سازه تحت بار خارجی و محاسبه نیروهای داخلی ← M_L: در تیرهای خمشی

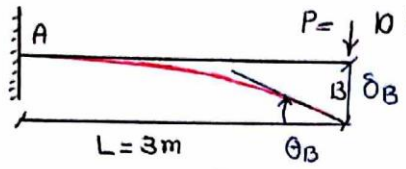
۲) تحلیل سازه تحت بار واحد و محاسبه نیروهای داخلی ← M_u: در تیرهای خمشی

۳) انتگرال‌گیری و محاسبه $\Delta(\delta \text{ یا } \theta)$ ← $\Delta = \int \frac{M_u M_L}{EI} dx$

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

مثال: در سازه‌ی مقابل مطلوب است محاسبه جرضن و جابجایی در نقطه B

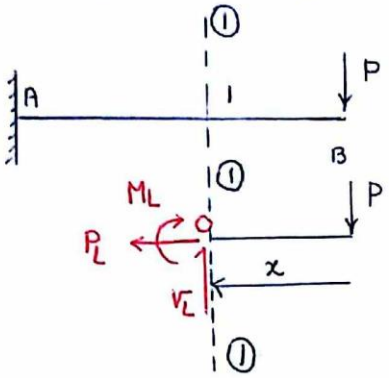
صفحی تیر (EI) ثابت است.



$\delta_B = ?$; $\theta_B = ?$

محاسبه θ_B (شیب در نقطه B)

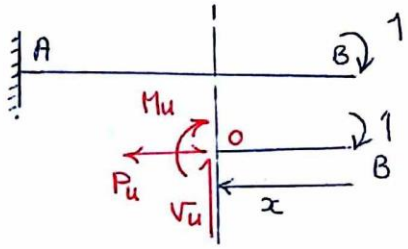
گام اول سیستم تحت بارهای خارجی (M_L)



$$\curvearrowleft \sum M_O = 0 \Rightarrow M_L + (P \times x) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{M_L = -Px}$$

گام دوم. سیستم تحت بار واحد (M_u)



$$\curvearrowleft \sum M_O = 0 \rightarrow Mu + 1 = 0$$

$$\rightarrow \underline{Mu = -1}$$

گام سوم انتگرال گیری:

$$\theta_B = \int_0^L \frac{M_u M_L}{EI} dx = \int_0^L \frac{(-1)(-Px)}{EI} dx = \left. \frac{Px^2}{2EI} \right|_0^L$$

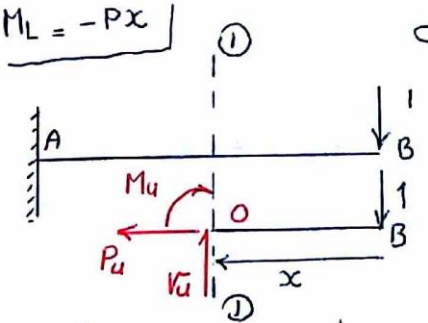
$$\underline{\theta_B = \frac{PL^2}{2EI}} \; ; \; P=10, L=3 \Rightarrow \underline{\theta_B = \frac{45}{EI}}$$

محاسبه جابجایی نقطه B (δ_B)

$\underline{M_L = -Px}$

گام اول - سیستم تحت بار خارجی. مثل گام اول در حالت قبل است

گام دوم - سیستم تحت بار واحد



$$\curvearrowleft \sum M_O = 0 \rightarrow Mu + (1 \times x) = 0$$

$$\underline{Mu = -x}$$

گام سوم انتگرال گیری

$$\delta_B = \int_0^L \frac{M_u M_L}{EI} dx = \int_0^L \frac{(-x)(-Px)}{EI} dx = \left. \frac{Px^3}{3EI} \right|_0^L$$

$$\underline{\delta_B = \frac{PL^3}{3EI}} \; ; \; L=3m, P=10 \Rightarrow \underline{\delta_B = \frac{90}{EI}}$$

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

مشاهده می شود که سیستم تحت بار واحد کاملاً شبیه با سیستم تحت بار خارجی است تفاوتا این تفاوت که نیروی P در ضریب $\frac{1}{4}$ ضرب شده است. بیرون داریم.

$$M_u = \frac{1}{4} M_L$$

Sec (1-1) $\quad M_u = \frac{1}{4} \times 2x = 0.5x = \frac{1}{2}x \quad 0 \le x \le 6$

Sec (2-2) $\quad M_u = \frac{1}{4}(2x) = 0.5x = \frac{1}{2}x \quad 0 \le x \le 6$

گام سوم انتگرال گیری

$$\delta_c = \underbrace{\int_0^6 \frac{(2x)(\frac{1}{2}x)}{EI}\,dx}_{\text{برای فاصله } C\bar{A}} + \underbrace{\int_0^6 \frac{(2x)(\frac{1}{2}x)\,dx}{EI}}_{\text{برای فاصله } C\bar{B}}$$

$$\delta_c = \underbrace{\int_0^3 \frac{x^2}{EI_1}\,dx}_{\text{برای } D\bar{A}} + \underbrace{\int_3^6 \frac{x^2 dx}{EI_2}}_{\text{برای } C\bar{D}} + \underbrace{\int_0^3 \frac{x^2}{EI_1}\,dx}_{\text{برای } E\bar{B}} + \underbrace{\int_3^6 \frac{x^2 dx}{EI_2}}_{\text{برای } C\bar{E}}$$

مشاهده می شود که به دلیل تقارن انتگرال در فاصله $C\bar{A}$ با انتگرال در فاصله $C\bar{B}$ برابر است.

$$\delta_c = 2\left[\int_0^3 \frac{x^2}{EI_1}\,dx + \int_3^6 \frac{x^2}{EI_2}\,dx\right] = 2\left[\frac{x^3}{3EI_1}\Big|_0^3 + \frac{x^3}{3EI_2}\Big|_3^6\right]$$

$$\delta_c = 2\left[\frac{9E^-}{EI_1} + \frac{63}{EI_2}\right] \Rightarrow \delta_c = \frac{18}{EI_1} + \frac{126}{EI_2}$$

$$\delta_c = \frac{18}{80\times10^3} + \frac{126}{120\times10^3} \Rightarrow \delta_c = 1.275\times10^{-3}\ m$$

$$\delta_c = 1.275\ mm$$

نتیجه: می توانستیم تغییر شکل ها را در نقطه اول تیر (A-C) ی سه و جواب آخر را دوبرابر کنیم، به خاطر اینکه شرایط تقارن برقرار است.

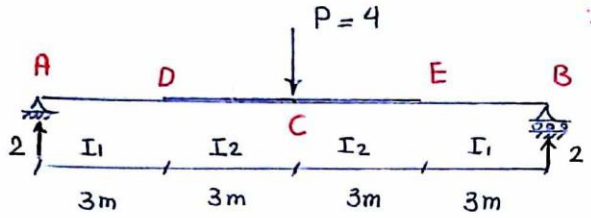
شرایط تقارن:

۱) تقارن از نظر بارگذاری ۲) تقارن از نظر هندسه

۳) تقارن از نظر تکیه گاه ها و شرایط مرزی ۴) تقارن از نظر سختی (در این مثال EI)

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

مثال: در تیر شکل مقابل تغییرمکان در وسط تیر را بدست آورید.



E = Constant

$E = 20 \times 10^6 \left(\frac{ton}{m^2}\right)$

$P = 4\ ton$

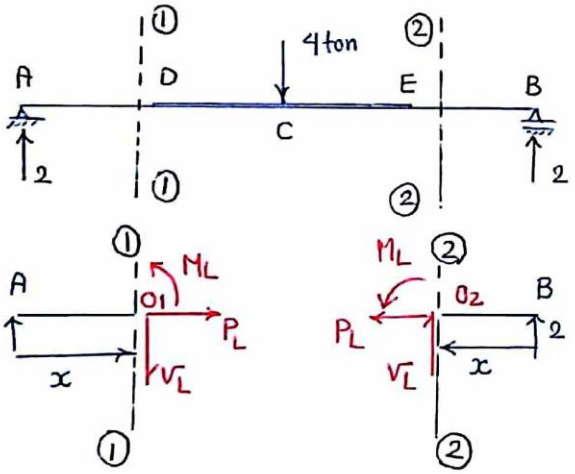
$I_1 = 4 \times 10^{-3} (m^4)$

$I_2 = 6 \times 10^{-3} (m^4)$

برای حل مسئله از سیستم ton، cm ، ton.m استفاده می‌کنیم. پس فاصله ها برحسب cm و نیرو برحسب ton، گشتاور برحسب ton.m و ممان اینرسی برحسب m^4 خواهد بود.

$EI_1 = 20 \times 10^6 \times 4 \times 10^{-3} = 80 \times 10^3\ (ton.m^2)$

$EI_2 = 20 \times 10^6 \times 6 \times 10^{-3} = 120 \times 10^3\ (ton.m^2)$



گام اول. سیستم تحت بارگذاری

برای تحلیل تیر دو مقطع کافی است

یکی بین A تا C و یکی بین C تا B

Sec. (1-1)

$\curvearrowright^{+} \sum M_{O_1} = 0 \Rightarrow M_L - 2(x) = 0$

$M_L = 2x \qquad 0 \le x \le 6$

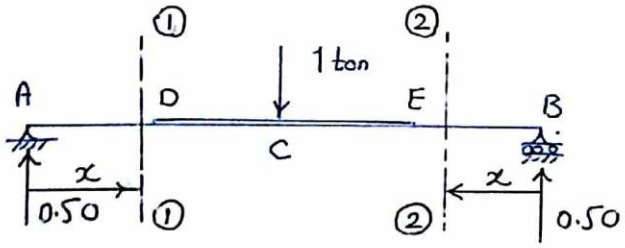
Sec (2-2)

$\curvearrowright \sum M_{O_2} = 0 \Rightarrow M_L - (2 \times x) = 0$

$M_L = 2x$

با توجه به تقارن تیر مشاهده می‌شود که نتایج یکسانی در دو مقطع گرفتیم به همین دلیل نیازی به محاسبات نیست.

گام دوم. سیستم تحت بار واحد.



کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

محاسبه تغییر شکل در سازه های دوبعدی (مسطح).

در سازه های دوبعدی یا مسطح اغلب تغییرشکل های حاصل از خمش و نیروی محوری حائز اهمیت هستند. بنابراین داریم:

$$(\delta \text{ یا } \theta) = \sum_{i=1}^{m} \left(\int \frac{M_u M_L dx}{EI} dx \right)_i + \sum_{i=1}^{m} \left(\int \frac{P_u P_L dx}{EA} \right)_i$$

که در آن m تعداد اعضاء قاب است. (تغییرشکل های حاصل از خمش) (تغییرشکل های حاصل از محوری)

محاسبه تغییرشکل ها در تیرهای عمیق.

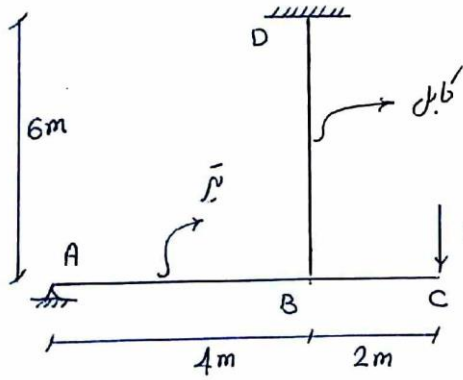
در تیرهای عمیق، تغییرشکل های حاصل از خمش و برش حائز اهمیت هستند. بنابراین داریم:

$$(\delta \text{ یا } \theta) = \int \frac{M_u M_L dx}{EI} + \alpha_s \int \frac{V_u V_L}{GA} dx$$

در رابطه فوق α_s ضریب شکل مقطع برای تغییرشکل های برشی است.

برای مقطع مستطیل شکل $\alpha_s = \frac{6}{5}$ و برای دایره $\alpha_s = \frac{10}{9}$ می باشد.

مثال. در قاب شکل مقابل تغییر مکان قائم نقطه C را محاسبه کنید. تغییرشکل های حاصل از خمش و نیروی محوری را محاسبه کنید.



$E = 200\ GPa$

برای کابل BD: $A = 150\ mm^2$

برای تیر AC: $I = 80 \times 10^6\ mm^4$

توجه از سیستم واحد ton.m برای حل مسئله استفاده می کنیم

$A = 150\ mm^2 = 150\ (10^{-3}m)^2$

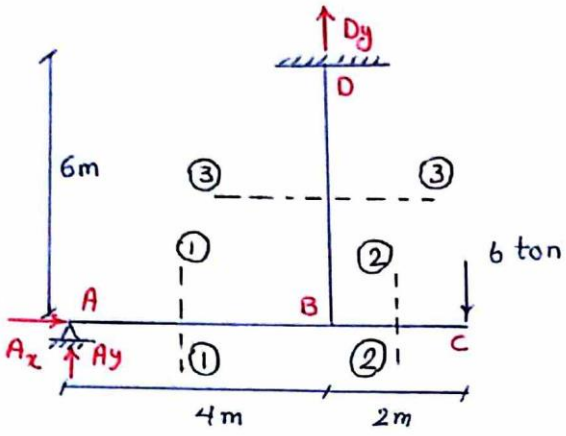
$A = 150 \times 10^{-6}\ m^2$

$I = 80 \times 10^6 (mm)^4 = 80 \times 10^6 (10^{-3}m)^4 = 80 \times 10^6 \times 10^{-12} m^4$

$I = 80 \times 10^{-6}\ m^4$

$E = 200 \times 10^9 (Pa = \frac{N}{m^2}) = 200 \times 10^9 \times (\frac{1}{10 \times 10^3} \frac{t}{m^2}) = 20 \times 10^6 (\frac{ton}{m^2})$

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.



گام اول- سیستم تحت بار خارجی (P_L, M_L)

$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

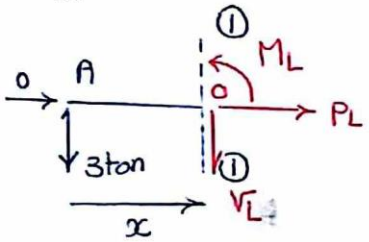
$\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow -(D_y \times 4) + (6 \times 6) = 0$

$\Rightarrow D_y = 9 \text{ ton}$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + D_y - 6 = 0$

$\Rightarrow A_y = -3 \text{ ton}$

پس از محاسبه واکنش های تکیه گاهی در قسمت‌های مختلف قاب مقادیر P_L و M_L رابدست می آوریم

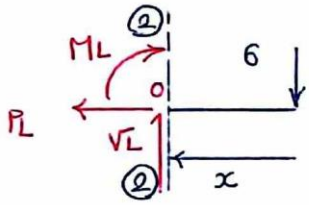


برای عضو AB Sec (1-1)

$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow P_L = 0$

$\curvearrowright \sum M_0 = 0 \Rightarrow -(3 \times x) - M_L = 0$

$\Rightarrow M_L = -3x$

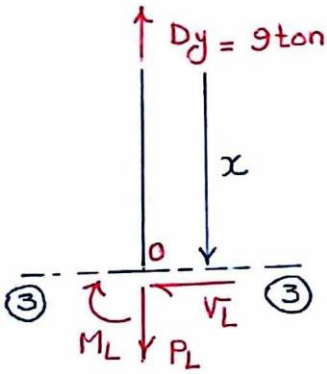


برای عضو BC Sec (2-2)

$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow -P_L = 0 \Rightarrow P_L = 0$

$\curvearrowright \sum M_0 = 0 \Rightarrow M_L + (6 \times x) = 0$

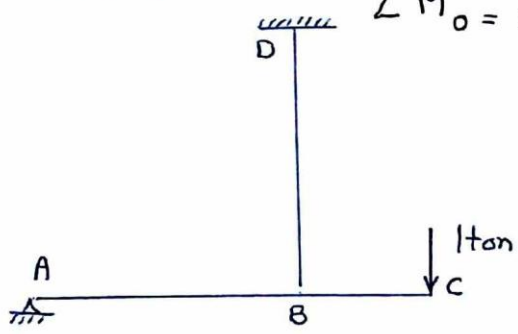
$\Rightarrow M_L = -6x$



برای عضو BD Sec(3-3)

$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 9 - P_L = 0 \Rightarrow P_L = 9 \text{ ton}$

$\sum M_0 = 0 \Rightarrow M_L = 0$



گام دوم سیستم تحت بار واحد

مشاهده می شود که سیستم کاملا مشابه حالت بارگذاری خارجی است و فقط بار در $\frac{1}{6}$ ضرب شده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

برای عضو AB :
$$\begin{cases} M_{LL} = \frac{1}{6}(-3x) = -0.5x \\ P_{LL} = \frac{1}{6}(0) = 0 \end{cases}$$

برای عضو BC :
$$\begin{cases} M_u = \frac{1}{6}(-6x) = -x \\ P_u = \frac{1}{6}(0) = 0 \end{cases}$$

برای عضو BD
$$\begin{cases} M_u = \frac{1}{6}\times(0) = 0 \\ P_u = \frac{1}{6}\times 9 = 1.5 \end{cases}$$

گام سوم: انتگرال گیری روی تمام اعضاء

برای AB :
$$\delta_C = \int \frac{M_u M_L dx}{EI} + \int \frac{P_u P_L dx}{EI}$$

$$\delta_C = \int_0^4 \frac{(-0.5x)(-3x)dx}{EI} + \int_0^4 \frac{(0)(0)dx}{EA}$$

$$\delta_C = \int_0^4 \frac{1.5x^2}{EI}dx = \frac{1.5x^3}{3EI}\Big|_0^4 = \frac{32}{EI}$$

برای BC :
$$\delta_C = \int \frac{M_u M_L dx}{EI} + \int \frac{P_u P_L dx}{EA} = \int_0^2 \frac{(-x)(-6x)dx}{EI} + \int_0^2 \frac{(0)(0)dx}{EA}$$

$$\delta_C = \int_0^2 \frac{6x^2 dx}{EI} = \frac{6x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{16}{EI}$$

برای BD :
$$\delta_C = \int_0^6 \frac{M_u M_L dx}{EI} + \int_0^6 \frac{P_u P_L dx}{EA}$$

$$\delta_C = \int_0^4 \frac{(0)(0)dx}{EI} + \int_0^6 \frac{(1.5)\times 9 dx}{EA} = \frac{81}{EA}$$

کل:
$$\delta_C = \underbrace{\frac{32}{EI}}_{\text{سهم خمش تیر AC}} + \underbrace{\frac{16}{EI}}_{\text{سهم خمش تیر BC}} + \underbrace{\frac{81}{EA}}_{\text{سهم محوری کابل}} = \frac{48}{EI} + \frac{81}{EA}$$

$$\delta_C = \frac{48}{20\times10^6 \times 80\times10^{-6}} + \frac{81}{20\times10^6 \times 150\times10^{-6}} = \underbrace{0.030}_{\text{سهم خمش تیر}} + \underbrace{0.027}_{\text{سهم محوری کابل}} = 0.057\ m$$

$$\delta_C = 0.057\ m = 57\ mm$$

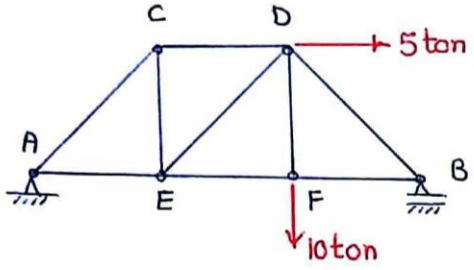
کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

محاسبه تغییرشکل محوری در خرپاها.

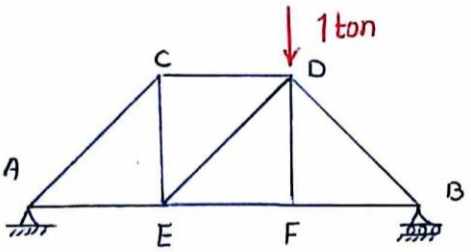
در خرپاها فقط تغییرشکل های حاصل از نیروی محوری را خواهیم داشت. یعنی می نویسیم $\delta = \sum_{i=1}^{m} \int_0^L \frac{P_u P_L dx}{EA}$

اکنون فرض می کنیم نیروی محوری در هر عضو خرپا ثابت باشد (P_u و P_L ثابت هستند)

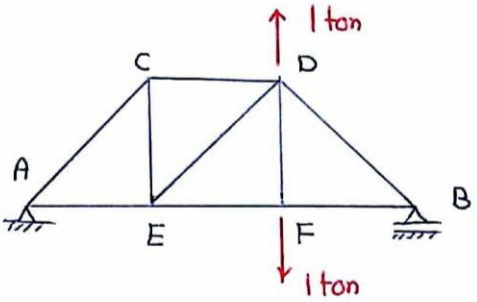
به همین دلیل از روی اعضاء خرپا صرف نظر می شود. همین طور فرض می کنیم هر عضو دارای مقطع ثابت باشد یعنی EA ثابت است. در این صورت می توان نوشت: $\delta = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{P_u P_L L}{EA}\right)_i$



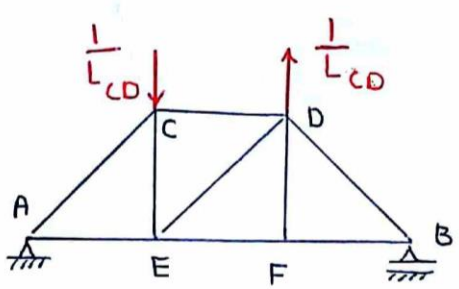
تمرین: برای هرکدام از تغییرشکل های مورد نظر سیستم تحت بار واحد را تشکیل دهید.



الف) تغییرمکان قائم D: δ_{DV}



ب) تغییرطول محوری عضو DF: δ_{DF}



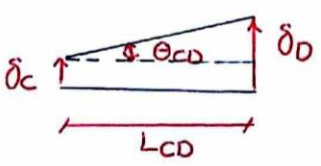
ج) دوران عضو CD: θ_{CD}

توضیح در مورد ج) دوران عضو CD.

برای محاسبه θ_{CD} باردواحد در D تغییرمکان قائم D به سمت بالا را نشان می دهد یعنی (δ_D)

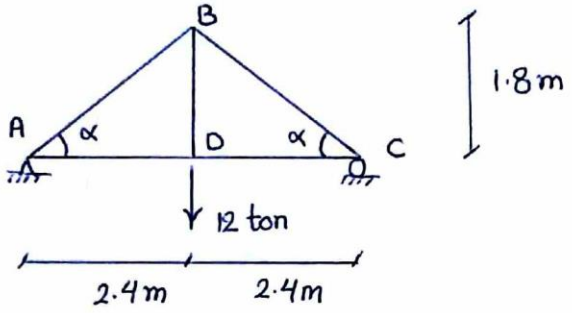
بار واحد در C تغییرمکان قائم C را به سمت پایین نشان می دهد یعنی ($-\delta_C$) اکنون برای دوران داریم:

$$\theta_{CD} = \frac{\delta_D - \delta_C}{L_{CD}}$$



کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

مثال: در خرپای حمایل مطلوب است تغییرطول عضو BD و تغییر مکان قائم C



سطح مقطع اعضاء AB, BC:

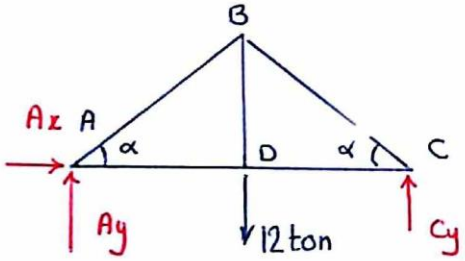
$A = 12\,cm^2 = 12 \times 10^{-4}\,(m^2)$

سطح مقطع اعضا BD، AD، CD:

$A = 5\,cm^2 = 5 \times 10^{-4}\,m^2$

$E = 20 \times 10^6\,(\frac{t}{m^2})$

گام اول: تحلیل خرپا تحت بار خارجی (PL)



$\tan\alpha = \frac{1.8}{2.4} = 0.75 \Rightarrow \alpha = 36.87°$

$\cos\alpha = 0.80$; $\sin\alpha = 0.60$

$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

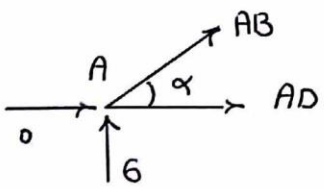
$l_{AB} = l_{BC} = \sqrt{1.8^2 + 2.4^2} = 3.00\,m$

$\sum M_A = 0 \Rightarrow (12 \times 2.4) - (C_y \times 4.8) = 0 \Rightarrow C_y = 6\ ton$

$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y + C_y = 12 \Rightarrow A_y = 6\ ton$

برای تحلیل خرپا از روش گره ها استفاده می کنیم. چون نیروی همه اعضاء نیاز است.

joint A)



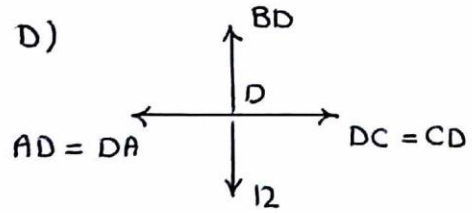
$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow AB \sin\alpha + 6 = 0$

$\Rightarrow AB = \frac{-6}{\sin\alpha} = -10\ (tan)$

$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow AD + AB\cos\alpha + 0 = 0$

$\Rightarrow AD = -AB\cos\alpha = 8\ ton$

joint D)



$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow BD = 12\ ton$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow DC = DA = 8\ ton$

با توجه به تقارن خرپا داریم: $BC = AB = -10\ ton$

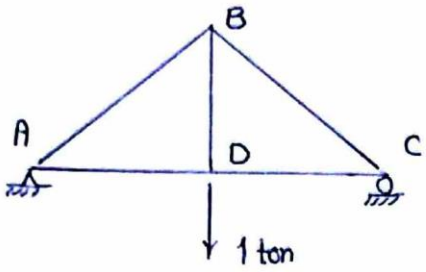
کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

گام دوم سیستم تحت بار واحد

مشاهده می‌کنیم که سیستم دقیقاً مثل سازه تحت بار خارجی است و فقط بار خارجی ۱ در $\frac{1}{12}$ ضرب شده است.

$$P_u = \frac{1}{12} P_L$$

پس داریم



$$AB = BC = \left(\frac{1}{12}\right)(-10) = -\frac{10}{12}$$

$$AD = CD = \left(\frac{1}{12}\right)(8) = \frac{8}{12}$$

$$BD = \frac{1}{12}(12) = 1$$

عضو	P_u (ton)	P_L (ton)	L(m)	$E(ton/m^2)$	$A(m^2)$	$P_u P_L / EA$ (m)
AB	$\frac{-10}{12}$	-10	3	20×10^6	12×10^{-4}	1.041×10^{-3}
AD	$\frac{8}{12}$	8	2.4	20×10^6	5×10^{-4}	1.280×10^{-3}
BC	$\frac{-10}{12}$	-10	3	20×10^6	12×10^{-4}	1.042×10^{-3}
BD	1	12	1.8	20×10^6	5×10^{-4}	2.160×10^{-3}
CD	$\frac{8}{12}$	8	2.4	20×10^6	5×10^{-4}	1.28×10^{-3}
Σ	---					6.804×10^{-3}

$$\delta_{CV} = 6.804 \text{ mm}$$

تغییر طول عضو BD: می‌توان از روش بار واحد استفاده کرد اما ساده‌تر استفاده از معادلات مصالح است:

$$\delta_{BD} = \frac{P_L \times L}{EA} = \frac{12 \times 1.8}{20 \times 10^6 \times 5 \times 10^{-4}} = 2.16 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta_{BD} = 2.16 \text{ mm}$$

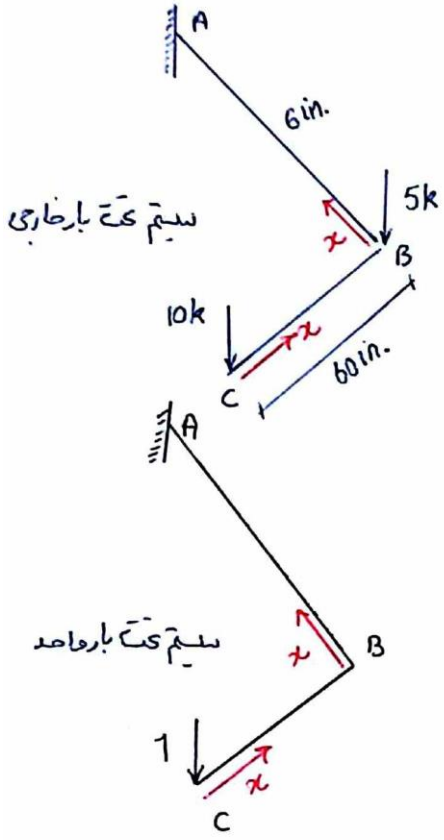
کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

محاسبه تغییرشکل در قاب‌های فضایی یا سه‌بعدی

در قاب های فضایی تغییرشکل های حاصل از خمش و پیچش مهم هستند بنابراین می توان نوشت:

$$(\delta \text{ یا } \theta) = \sum_{i=1}^{m} \left(\int \frac{M_u \times M_L \, dx}{EI} + \int \frac{T_u \times T_L \, dx}{GJ} \right)$$

تغییرشکل‌های حاصل از پیچش — تغییرشکل‌های حاصل از خمش



سیستم تحت بار خارجی

شکل تغییرمکان قائم نقطه C

$E = 30 \times 10^3$ ksi $I = 144$ in.^{4}

$G = 12 \times 10^3$ ksi $J = 288$ in.^{4}

سیستم تحت بار واحد

گام اول سیستم تحت بار خارجی:

برای BC: $M_L = -10x$; $T_L = 0$

برای BA: $M_L = -15x$; $T_L = 600$

گام دوم سیستم تحت بار واحد:

برای BC: $M_u = -x$; $T_u = 0$

برای BA: $M_u = -x$; $T_u = 60$

$$\delta_{CV} = \sum_{i=1}^{m} \left(\int_0^L \frac{M_u M_L \, dx}{EI} + \int_0^L \frac{T_u T_L}{GJ} \right)_i$$

برای BC: $\delta_{CV} = \int_0^{60} \frac{(-x)(-10x)}{EI} + \int_0^{60} \frac{(0)(0)}{GJ} dx = \frac{720 \times 10^3}{EI}$

برای AB: $\delta_{CV} = \int_0^{60} \frac{(-x)(-15x)\,dx}{EI} + \int_0^{60} \frac{(60 \times 600)\,dx}{GJ} = \frac{1080 \times 10^3}{EI} + \frac{2160 \times 10^3}{GJ}$

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

$$\delta_{cv} = (\delta_{cv})_{AB} + (\delta_{cv})_{BC} = \frac{1080\times10^3}{EI} + \frac{2160\times10^3}{GJ} \quad \frac{720\times10^3}{EI}$$

$$\delta_{cv} = \underbrace{\frac{1800\times10^3}{EI}}_{\text{سهم خمش}} + \underbrace{\frac{2160\times10^3}{GJ}}_{\text{سهم پیچش}}$$

$$\delta_{cv} = \frac{1800\times10^3}{30\times10^3\times144} + \frac{2160\times10^3}{12\times10^3\times288} = 0.4167 + 0.625$$

$$\delta_{cv} = 1.0417 \text{ in.}$$